ファジィ・エントロピーを用いた情報管理モデル

キーワード：ファジィ事象，偶然性，漠然性，エントロピー，ファジィ・エントロピー

On Information Management Model Using Fuzzy Entropy

山　下　洋　史
Hiroshi Yamashita

1．はじめに

現在の情報化社会において，我々は「情報」に対し多大なる期待を抱いており，その結果として情報の獲得・整理・分析・活用にコンピュータおよびそのネットワークが活躍することとなった。我々にとって「情報」が魅力的な存在であるがゆえに，これを常に明確（クリスプ）な存在であるかのように考える傾向がある。

しかし，人間や組織が取り扱う情報には多くの場合「あいまいさ」が介在する。上記のような期待がこのあいまいさを排除しようとするが，完全に排除することは不可能である。そのために，我々はどのような行動をとるべきかについて迷いが生じる。

人間が意思決定を行い何らかの行動をとる際に，環境がどのような状態にあり，それに対して行動がどのような影響を与えるものかが不確実であり(偶然性)，またそれがどのような意味を持つのかがあいまいである（漠然性）ため，迷いが生じる[1]。もし，環境およびそれに対する行動の影響が確定的であり，行動の意味が明確ならば人間はどのような行動をとるかについて迷わないはずである。

このような情報管理における「あいまいさ」に注目すると，そこには2つのタイプのあいまいさが存在すると考えられている[1],[2]。その1つは「確率」によって表現される「偶然性」（ランダムネス）であり，もう1つはファジィ集合に対する「メンバーシップ値」によって表現される「漠然性」（ファジィネス）である。一般に，我々が受け取る情報にはランダムネスとファジィネスが介在しており，これはファジィ・メッセージと呼ばれる。したがって，我々が「情報」と呼ぶもののほとんどがファジィ・メッセージであり，ファジィ・メッセージをいかに管理するかが「情報管理」の中心に位置づけられる。そして，このあいまいさの二面性が人間の情報処理過程のあいまいさを特徴づけており，これらをいかにして捉えるか，また，いかにして定式化するかが重要な課題となる。

偶然性に関するあいまいさについては，これを捉える際に「エントロピー」が用いられることが多い。例えば，与えられた証拠のみでは結論が得られないような拡大推論における一般原

理を確率論的に展開したものとして，「最大エントロピー原理」がある[3]。この原理は，我々が不十分な証拠から確率分布を推定しようとする場合，証拠が不十分であることを完全に認識するために，その証拠にしたがったすべての確率分布の中から最大の不確実さを持つ分布を選択しようとするものである。具体的には，与えられた証拠（例えば，確率変数の平均）を制約としてエントロピーを最大化する確率分布を推定することになり，人間の情報処理過程の「偶然性」を捉えたモデルとして位置づけられる。

これに対して，最近，人間の情報処理過程における意味面でのあいまいさ（漠然性）をファジィ理論によって捉えようとする試みが数多くなされており(例えば[2]～[5]等)，筆者らも過去に，ファジィ事象の確率，ファジィ条件つき確率，ファジィ・エントロピーを用いた研究([6]～[21]等）を行ってきた。

本研究ではこれら筆者の一連の研究を整理し，総合的に報告するものである。具体的には，例えば「今年は景気が低迷しそうだ」といったファジィ・メッセージに関して，その特性値をファジィ集合（景気の悪い年の集合）に対するメンバーシップ値によって捉えることにし，ファジィ事象における偶然性と漠然性についての総合的なあいまいさを表すファジィ・エントロピーを用いた3つの情報管理モデルを提示する。

そこで，まず，企業環境の変化が激しさを増している今日，情報のあいまいさに対する積極的アプローチが情報管理の課題となっている状況を概説し，人間の情報処理過程におけるあいまいさの二面性（偶然性と漠然性）について検討する。そして，情報のあいまいさを特徴づけるファジィ事象の偶然性と漠然性を表現するための指標について述べる。上記の例でいえば「景気が低迷するのかしないのか」が偶然性についてのあいまいさ（ランダムネス）を，また「景気が低迷する年の集合（ファジィ集合）に属するのか属さないのか」が漠然性についてのあいまいさ（ファジィネス）を意味する。そして，これらの両面を持つファジィ事象に関して，偶然性についてのあいまいさを表現するための指標（通常のエントロピー；確率まわりのエントロピー），漠然性についてのあいまいさを表現する指標(メンバーシップ値まわりのエントロピー)，それらを合成した総合的なあいまいさの指標（ファジィ・エントロピー，ファジィ事象の確率まわりのエントロピー）を概説する。

次に，ファジィ事象を特徴づける「ファジィ・メッセージ」(上記の例でいえば「今年は景気が低迷しそうだ」というメッセージ）の定義およびその特性の検討を行っていく。従来，ファジィ・メッセージは明確な定義がなされていなかった[21]ためにクリスプ・メッセージとの関係が不明確であったが，ここでの定義および特性の検討により，クリスプ・メッセージがファジィ・メッセージの特別な場合として位置づけられることを示す。

その上で，ファジィ事象における偶然性と漠然性の総合的なあいまいさを表すファジィ・エントロピーを用いた3つの情報管理モデル（山下ら[8],[1],[7]）について述べる。これらは，与えられた条件（制約）のもとでファジィ・エントロピーを最大化する選択確率を推定するモデルであり，本研究で取り扱う条件（制約）としては，

1)確率変数の平均が一定

2)確率変数の平均の最小化

3)メンバーシップ値まわりのエントロピーが一定

の3つを考えることにする。そして，それぞれの場合について，通常の（シャノンの）エントロピーを最大化するモデルと比較し，ファジィ・エントロピーを最大化するモデルの解が通常のモデルの解の拡張形として導かれることを示す。

2．企業環境の変化と情報管理におけるあいまいさへの対応

企業環境は刻一刻と変化しており，しかもその変化はしだいに激しさを増している。そこで，より確実な情報を得るために，企業では多大なる努力を払っている。インターネットをはじめとするコンピュータ・ネットワークの発展は，このようなニーズに支えられているものと考えられる。しかし，上記のように確実な情報は少なく，ほとんどの場合何らかのあいまいさが介在する。

企業では，あいまいな情報で手配を行うと後で変更になって混乱を引き起こすことが多いため，そのようなことにならないためにも確定した情報が得られるまで待とうとする傾向がある。これは，あいまいな情報（ファジィ・メッセージ）を基に行動した場合，後でその解釈が違っていたり，変更になって混乱するといった問題がしばしば起こるためである。

しかし，確実な情報が得られるまで待っていたのでは間に合わない，あるいは手遅れになることも多い。また，全くあいまいさがなく完全に明確な情報はほとんど考えられない。どのような情報にでも何らかのあいまいさが存在する。正式な契約書や注文書になれば，ほぼ確実な情報といって良いのだが，それでも付随する条件等については不明確な点も残る。このように考えると，我々が受け取るほとんどの情報には何らかのあいまいさが存在する。したがって，情報のあいまいさがどの程度のものなのか，その重要性はどの程度なのか，ほぼ確実な情報がいつごろ得られるのか，納期はいつなのか，納期までにかかるリードタイムはどれくらいの長さなのかによって，ケース・バイ・ケースで行動に移すか否かを決めざるを得ない。あいまいな情報で動くときもあるし，確実な情報を入手するまで待つこともある。

しかし，企業環境の変化が激しく，製品のライフサイクルが短くなり，新製品の競争が激化し，消費者のあいまいな感性にうったえることが必要になった今日，確実な情報を入手するまで待つことは許されなくなりつつある。意思決定・行動にスピードが要求されるわけである。環境の変化やトラブルに柔軟かつ迅速に対応しうる柔らかい組織，水平的コーディネーション，同時並行的に業務を進めるコンカレント・エンジニアリングが志向される理由はここにある。すなわち，あいまいさを避けるのではなく，積極的にアプローチしていくことが要求される。今後は，あいまいな情報をいかに有効に活用するか，それに基づきいかに迅速に行動に結びつけるか，その際にいかに混乱を最小限に抑えるかが企業にとっての重要な課題となる。

次節以降では，このような問題意識に基づき，情報の「あいまいさ」を捉える際の視点と，それに対して積極的にアプローチするためのモデルについて述べていく。

3．人間の情報処理過程における偶然性と漠然性

人間の情報処理過程には，常にあいまいさが介在している。例えば，我々は今日の天候や天気予報の情報を基に「明日は天気がくずれそうだ」というようなことを話す。その際，本当に天気が「くずれる」のか「くずれないのか」については「あいまい」である。これは天気がくずれる確率が高いが，絶対にくずれないわけではない（確率が0でない）ことを意味する。このようにある確率に支配されていることは，上記の情報に「偶然性」に関するあいまいさが介在していることを表している。

さらに，「天気がくずれる」とは雨なのか曇りなのか，はたまた雪なのか嵐なのかについても「あいまい」である。これは，「天気がくずれる」の意味があいまいなことを示しており，その意味が漠然としているという点で，「漠然性」に関するあいまいさが介在していることを表している。このように，我々の思考・判断・ことばには，偶然性と漠然性の両面においてあいまいさが介在しているものと考えられる。

それでは，上記の漠然性（ファジィネス）と偶然性（ランダムネス）のあいまいさの両面を持った人間の情報処理過程を捉えるには，どのような方法があるのであろうか？

このような情報処理過程を，西川ら[2]は入力情報uを出力情報vに変換する「フィルター機構」として位置づけている。ここで，入力情報を刺激(stimulus)，出力情報を反応(response)と考えれば，図1のように人間の情報処理過程は，伝統的な刺激－反応モデル（S－Rモデル）のブラック・ボックスの問題に帰着する。S－Rモデルは，測定可能な刺激と反応に注目して両者の関係を捉えようとするものであり，両者の間の情報処理過程はブラック・ボックスとして位置づけられる。

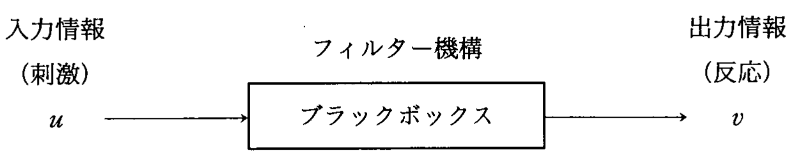

図1．人間の情報処理過程

人間の思考・行動を考える上で，このブラック・ボックスの役割は大きいが，その把握はきわめてむずかしい。それは，ブラック・ボックスでの複雑な情報処理における偶然性としての「ランダムネス」と漠然性としての「ファジィネス」とに起因する面が大きいものと考えられる[1]。

したがって，人間の情報処理過程を捉える上で，そのあいまいさを構成するランダムネスとファジィネスへのアプローチが重要な課題となる。この課題に対して，西川ら[2]は，ファジィ

ネスをファジィ理論におけるメンバーシップ値μ_iによって，またランダムネスを生起確率p_iによって捉え，両者が複合した出力情報v_iのあいまいさを「行動エントロピー」と呼び，ファジィ・エントロピーFにより以下のように定式化している。そして，この行動エントロピーを人間の情報処理過程における総合的なあいまいさを表現する指標として位置づけている。

$$F=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[-p_i\cdot\mu_i\cdot log(p_i\cdot\mu_i)-p_i(1-\mu_i)\,log\,\{p_i(1-\mu_i)\}] \tag{1}$$

ただし，p：選択確率 $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$

μ：メンバーシップ値（$0\leqq\mu_i\leqq1$），　i：サンプル

ここで，同一のサンプルについて考える場合は，1/nは定数となるので除去して考えることができ，これを，p_iとμ_iについて整理すると，(2)式のように変換される。

$$F=-\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot log\,p_i+\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot H_i \tag{2}$$

ただし，

$$H_i=-\mu_i\cdot log\,\mu_i-(1-\mu_i)\,log(1-\mu_i) \tag{3}$$

(2)式の右辺の第1項は，偶然性（ランダムネス）に関するエントロピー，右辺の第2項は漠然性（ファジィネス）に関するエントロピーを表している。第1項の偶然性に関するエントロピーは，「どのサンプルを選択するか？」についてのあいまいさを表現しており，シャノンの情報理論における通常のエントロピー（＝平均情報量）に相当する。したがって，どのサンプルを選択したかを知ったときに得られる情報量の平均を意味する。

また，第2項の漠然性（ファジィネス）に関するエントロピーは，「サンプルiが，ファジィ集合に属するのか属さないのか？」についてのサンプル別iのエントロピーH_iを選択確率p_iで重みづけしたものであり，漠然性に関するエントロピーの平均として解釈することができる。

このように人間の情報処理過程には，偶然性と漠然性に関するあいまいさが介在しており，ファジィ・エントロピーはこれらの両面を総合的に捉える際の有力な指標となる。

4．偶然性と漠然性に関するあいまいさの表現方法

ここでは，人間の情報処理過程において，あいまいさを構成する偶然性（ランダムネス）と漠然性（ファジィネス）の両面を捉えるための5つの指標について，筆者の従来の研究[10]に基づき概説する。

4.1　確率まわりのエントロピーI（通常のエントロピー）

これは，コインを投げて表が出るかもしれないし，裏が出るかもしれないというような「何

が起こるのか？」,「どれを選択するのか？」についてのあいまいさの測度であり，偶然性に関するあいまいさの指標として位置づけられる。したがって，このあいまいさは確率p_iによって(4)式のように定義され，シャノンの情報理論における通常のエントロピー（＝平均情報量）に相当する。

$$I = -\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot log\, p_i \tag{4}$$

(4)式は，すべての確率p_iが1/nで等しいときに最大となり，その場合，どのiが起こるのかが全くわからない状態を表している。

4.2 サンプル別のメンバーシップ値まわりのエントロピーH_i

このエントロピーH_iは，サンプルiがファジィ集合Aに属するのか属さないのかといった意味面でのあいまいさを表すものである。例えば，前述の例で今年が「景気の悪い年の集合」に属するか否かのあいまいさがこれに相当する。すなわち，意味の漠然性に関するあいまいさの指標であり，サンプルiがファジィ集合Aに属する度合（メンバーシップ値μ_i）と，その補集合$\bar{A}$に属する度合（$1-\mu_i$）の間のあいまいさとして前述の(3)式のように定式化される。

(3)式は，メンバーシップ値μ_iが1/2のときに最大となり，その場合，サンプルiがファジィ集合Aに属しているのか否かが全く不明確な状態を表している。

4.3 サンプル全体のメンバーシップ値まわりのエントロピーH

4.2のサンプルiごとに定式化された漠然性に関するエントロピーを，(5)式のようにサンプルiの選択確率p_iで重みづけすれば，サンプル全体としての漠然性に関するあいまいさの平均を考えることができる。(5)式は，ファジィ集合Aに属するか否かについてのあいまいさが，サンプル全体としてどの程度であるかを示しており，サンプル全体の漠然性についてのあいまいさの指標として位置づけられる。

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot H_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \{-\mu_i\, log\, \mu_i - (1-\mu_i)\, log\,(1-\mu_i)\} \tag{5}$$

(5)式は，メンバーシップ値$\mu_i = 1/2$となるサンプルiの生起確率p_iの和が1のときに最大となる。

4.4 ファジィ・エントロピーF（行動エントロピー）

4.1～4.3では，偶然性と漠然性それぞれのあいまいさの指標について考えてきたが，これらのあいまいさの両面を考慮した総合的なあいまいさの指標がファジィ・エントロピー（行動エントロピー）である。これは確率まわりのエントロピーIとメンバーシップ値まわりのエント

ロピーの平均Hの和として，前述の(2)式のように表される。

(2)式は，すべての確率p_iが1/nで等しく，かつすべてのメンバーシップ値μ_iが1/2のときに最大となり，その場合，どのiが起こるのかが全くわからなく，またすべてのiがファジィ集合Aに属しているのか否かが全く不明確な状態を表している。

4.5 ファジィ事象の確率まわりのエントロピーE

ファジィ理論において，漠然性を内包した確率としてのファジィ事象Bの確率P(B)は，(6)式によって定義されている。例えば，サイコロを振ったときに「大きい目の出る確率」のように，確率自体の偶然性に関するあいまいさと「大きい目かどうか」の意味面でのあいまいさ（漠然性）が複合した確率である。

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\cdot p_i \tag{6}$$

偶然性と漠然性のあいまいさを総合的に表す指標として，ファジィ・エントロピーとは別に，ファジィ事象の確率まわりのエントロピーEを考えることができ，ファジィ事象Bの確率P(B)とその補事象の確率$P(\overline{B})$（$=1-P(\overline{B})$）を用いて(7)式のように定式化される。

$$E=-P(B)\,log\,P(B)-P(\overline{B})\,log\,P(\overline{B}) \tag{7}$$

(7)式は，ファジィ事象の確率P(B)が1/2のときに最大となり，この場合，ファジィ事象Bが起こるのか否かが全くわからない状態を表している。

5．ファジィ・メッセージの定義および特性の検討

5.1 ファジィ条件つき確率

偶然性と漠然性のあいまいさの両面を持ったファジィ事象において，あるメッセージを受け取る前の（事前）確率とそれを受け取った後の（事後）確率の関係について考えてみる。例えば，サイコロで「大きい目が出た」というメッセージを受け取る前に，目x_iが出る確率（事前確率p_i）は，1/6であり，これを受け取った後の確率（事後確率q_i）は$x_i=6$や5について1/6より大きく，$x_i=1$や2についてはこれより小さい値になることが予想される。

ファジィ理論では，この事後確率をファジィ・メッセージを受け取ったもとでの「ファジィ条件つき確率」と呼んでおり，下式のように定義される。

$$q_i=\frac{\mu_i\cdot p_i}{\sum_{k=1}^{n}\mu_k\cdot p_k} \tag{8}$$

ここで，メッセージがファジィ・メッセージであるのは，「奇数の目が出た」，「4以上の目が出た」というような明確なメッセージ（これを本研究では「クリスプ・メッセージ」と呼ぶこ

とにする）とは異なり，「大きい目とは何か？」について意味面でのあいまいさが存在するためである。

5.2 ファジィ・メッセージの定義

従来，ファジィ・メッセージはその数学的定義は必ずしも明確ではなかったため，クリスプ・メッセージとの関係が不明確であった[21]。上の例でいえば，「大きい目が出た」というメッセージはそれぞれの目x_iが大きい目の集合（ファジィ集合）に属する度合（メンバーシップ値μ_i）によって特徴づけられている。

そこで，このメンバーシップ値μ_1〜μ_nによって構成されるベクトル

$$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\ \mu_2,\cdots,\ \mu_n)$$

をメンバーシップ・ベクトルと呼ぶことにし，これと集合$X=\{x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n\}$を用いて，下記のようにファジィ・メッセージMを定義する。

$$M=\{X\ ;\ \boldsymbol{\mu}\} \tag{9}$$

ただし，　$0\geqq\mu_i\geqq 1$

すなわち，ファジィ・メッセージMは，メッセージの対象となる集合Xとそれを特徴づける写像$\boldsymbol{\mu}$によって構成される。

ここで，ファジィ・メッセージの特別な場合として，すべてのメンバーシップ値が0または1の場合を考える。すなわち，x_iがファジィ・メッセージの意味を完全に満足するとき1，完全に満足しないとき0で，すべてのx_iがそのどちらかとなる場合である。このとき，ファジィ・メッセージには意味面でのあいまいさが全くなく，明確なメッセージ（クリスプ・メッセージ）となる。例えば，「奇数の目が出た」というメッセージでは，

$$\begin{cases}\mu_1=\mu_3=\mu_5=1\\ \mu_2=\mu_4=\mu_6=0\end{cases}$$

となる。このときのメンバーシップ値を特別にt_i，そのベクトルをtで表せば，クリスプ・メッセージCは，下記のように定義される。

$$C=\{X\ ;\ t\} \tag{10}$$

ただし，　$t=(t_1,\ t_2,\cdots,\ t_n)$，　$t_i=0$ or 1

これより，ファジィ・メッセージ（$0\geqq\mu_i\geqq 1$）はクリスプ・メッセージ（$t_i=0$ or 1）を包含しており，クリスプ・メッセージを拡張して一般化したものであることがわかる。そこで，これらの相違を明確にするために，クリスプ・メッセージを含まないファジィ・メッセージを考え，これを「真ファジィ・メッセージ」M^*（$0<\mu_i<1$）と呼ぶことにする。

ここで注意すべきことは，クリスプ・メッセージには意味面でのあいまいさは存在しないが，確率面でのあいまいさは存在しうるということである。例えば，上の奇数の目でいえば，奇数の目とは何か（意味面）についてのあいまいさは存在しないが，1が出るのか，3が出るのか，5が出るのかについての（確率面での）あいまいさは残っている。これは，クリスプ・メッセ

ージにおいて漠然性は存在しないが，偶然性は存在することを意味する。

5.3　ファジィ条件つき確率と通常の条件つき確率

クリスプ•メッセージを受け取ったもとでのファジィ条件つき確率（事後確率）r_iは，(8)式のμ_iをt_iに置き換えて，(11)式のように表される。

$$r_i = \frac{t_i p_i}{\sum_{k=1}^{n} t_k p_k} \tag{11}$$

ここで，(11)式のt_iは0 or 1であり，$t_i = 1$のものだけを取り上げれば事後確率r_iは事前確率p_iの比にのみ依存する。例えば，サイコロで「奇数の目が出た」というクリスプ・メッセージでは，

$$\begin{cases} t_1 = t_3 = t_5 = 1 \\ t_2 = t_4 = t_6 = 0 \end{cases}$$

であり，p_iはすべて1/6であるため，

$$r_1 = r_3 = r_5 = \frac{1 \times \frac{1}{6}}{1 \times \frac{1}{6} \times 3} = \frac{1}{3} \tag{12}$$

となる。「奇数の目が出た」ということは，１，３，５の目のいずれかが出たことを意味するため，$r_i = 1／3$は現実に即した結果である。これより，クリスプ・メッセージを受け取ったもとでのファジィ条件つき確率（事後確率）は，通常の条件つき確率となり，事実上，事前確率のみに依存することがわかる。このことは，ファジィ条件つき確率が通常の条件つき確率を包含し，通常の条件つき確率を拡張して一般化したものであることを意味する。

5.4　ファジィ・エントロピーと通常のエントロピー

前述の(2)式のように，ファジィ•エントロピーは偶然性に関するエントロピー（通常のエントロピー，シャノンのエントロピー，情報量）と漠然性に関するエントロピーの和として表現される。

ここで，クリスプ・メッセージを受け取ったもとでのファジィ・エントロピーについて考えると，(2)式のp_iをr_iに置き換えて(13)式のように表される。

$$F = -\sum_{i=1}^{n} r_i \log r_i + \sum_{i=1}^{n} r_i H_i \tag{13}$$

上式の第１項は偶然性に関するエントロピーであり，事後確率が通常の条件つき確率であることから通常のエントロピーに一致する。第２項は，漠然性に関するエントロピーであり，(3)式のμ_iをt_iに置き換えれば，

$$-1\,log\,1=0,\quad -0\,log\,0=0 \tag{14}$$

であるため，0となる。したがって，クリスプ・メッセージを受け取ったもとでのファジィ・エントロピーは，通常のエントロピーに一致する。

このことは，現実に即した特性であり，ファジィ・エントロピーについても通常のエントロピーを包含し，通常のエントロピーを拡張して一般化したものであることがわかる。

5.5 ファジィ事象の確率と通常の確率

4.5で述べたように，漠然性を内包した確率としてのファジィ事象Bの確率P(B)は(6)式によって定義されている。例えば，サイコロをふったときに「大きい目が出る確率」がこれに相当する。

クリスプ・メッセージを受け取ったもとでのファジィ事象Dの確率P(D)は，(6)式のp_iをr_iに，μ_iをt_iに置き換えて(15)式のように表される。

$$P(D)=\sum_{i=1}^{n} t_i r_i \tag{15}$$

ここで，上式のt_iは0 or 1であり，$t_i=1$のものだけを取り上げれば，ファジィ事象の確率はr_iの和となる。

例えば，サイコロで「奇数の目が出た」というクリスプ・メッセージでは，

$$\begin{cases} t_1=t_3=t_5=1 \\ t_2=t_4=t_6=0 \end{cases} \tag{16}$$

であり，$r_1=r_2=r_3=1/3$であるためx_1，x_3，x_5のみを取り上げて，

$$P(D)\ =\ 1\times\frac{1}{3}+\ 1\times\frac{1}{3}+\ 1\times\frac{1}{3}=1 \tag{17}$$

となる。「奇数の目が出た」というクリスプ・メッセージを受け取ったもとで奇数の目が出る確率が1となることを表現している。さらに，クリスプ・メッセージを受け取る前（事前）のファジィ事象の確率（奇数の目が出る確率）P(E)は，(15)式におけるr_iをp_iに置き換えて，

$$P(E)=\ (1\times\frac{1}{6}+0\times\frac{1}{6})\times 3=\frac{1}{2} \tag{18}$$

となる。事前情報を全く知らないもとで，サイコロの奇数の目が出る確率は明らかに1/2であり，上の結果はこれを満足している。また，この確率は，1，3，5の目の出る確率の和となっており，クリスプ・メッセージを受け取る前のファジィ事象の確率は通常の確率における排反事象（1か3か5の目が出る）の和の法則が成立することがわかる。

以上より，ファジィ・メッセージはクリスプ・メッセージを拡張して一般化したものとして定義でき，またこれにより，通常の確率論に基づく条件つき確率，エントロピー，事象の生起確率が，それぞれファジィ条件つき確率，ファジィ・エントロピー，ファジィ事象の確率の特

別な場合として位置づけられることがわかる。

6．確率変数の平均を制約としたファジィ・エントロピー最大化基準による選択確率推定モデル

6，7，8節では，人間の情報処理過程におけるあいまいさの二面性（偶然性と漠然性）を前提とした情報管理モデルの例として，それらのあいまいさを総合的に表す「ファジィ・エントロピーの最大化」を基準とした筆者らの3つのモデル[8]，[11]，[17]について述べることにする。

6.1　通常の「最大エントロピー原理」に基づく選択確率推定モデル

ファジィ・エントロピーFを最大化するモデルについて述べる前に，その基礎となる通常の「最大エントロピー原理」に基づく選択確率推定モデル[3]について簡単に触れておく。このモデルは，確率変数の平均Lが証拠として与えられている場合に，これを制約条件としてエントロピーを最大化する選択確率 p_i を推定するモデルである。すなわち，人間の行動のあいまいさをエントロピーによって考慮したモデルであり，我々が不十分な証拠から選択確率を推定しようとする場合，証拠が不十分であるということを完全に認識するためにその証拠にしたがったすべての確率分布の中から最大の不確実さ（エントロピー）を持つ分布を選択しようとするものである。その際に用いられる確率変数 x_i は，価格，時間等の明確（クリスプ）な情報である。

具体的には，前述の「最大エントロピー原理」にしたがい，確率変数の平均Lを制約条件としたもとでのエントロピーEの最大化問題として，ラグランジュ乗数 λ，ν を用いて(19)式のように定式化される。

$$R=-\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i-L\right)-\nu\left(\sum_{i=1}^{n} p_i-1\right) \rightarrow \max \tag{19}$$

ただし，i：サンプル，　x：確率変数

(19)式を最大化する p_i は(20)式で表され，(20)式のwは(22)式を満足する解として与えられる。

$$p_i=w^{x_i} \Big/ \sum_{k=1}^{n} w^{x_k} \tag{20}$$

ただし，　$w=e^{-\lambda}$　(21)

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-L)\, w^{(x_i-L)}=0 \tag{22}$$

6.2 ファジィ・エントロピーを用いたモデル

通常の「最大エントロピー原理」に基づくモデル（以下，これを通常のモデルと呼ぶことにする）における確率変数は，価格，時間に代表される明確（クリスプ）な情報として与えられていたが，人間のあいまいな行動を考える際には確率変数もあいまいな情報であることも多い。

そこで筆者[11]は，この確率変数x_iを，ファジィ集合に対するメンバーシップ値μ_iに置き換えた場合のモデル（以下，これをファジィ・モデルと呼ぶことにする）を提案している。例えば「なるべくおもしろい本を選択したい」といった人間の欲求に対して，「おもしろい本」をその境界があいまいなファジィ集合（おもしろい本の集合）に対するメンバーシップ値μ_iによって捉えている。

具体的には，まず通常のモデルにおける確率変数x_iをμ_iに置き換える。このことにより，確率変数の平均はファジィ事象の確率P(B)としての意味を持つことになる。すなわち「おもしろさの平均」であると同時に「おもしろい本である確率」を意味している。

次に，通常のモデルにおけるエントロピーについて考えてみると，「どの代替案(サンプル i)を選択するか？」といった偶然性（ランダムネス）についてのあいまいさを表している。これに対して，ファジィ・モデルで扱う確率変数はファジィ集合に対するメンバーシップ値であるため，偶然性についてのあいまいさのみならず，「どれくらいおもしろいのか？」といった意味面でのあいまいさを持っている。この意味面でのあいまいさは漠然性（ファジィネス）についてのあいまいさとして捉えることができ，偶然性との対比においてあいまいさの二面性を形成している。そこで，通常のモデルの偶然性に関するエントロピーに漠然性を加味すると，(2)式のファジィ・エントロピーとなり，確率変数の平均M（ファジィ事象の確率）を制約としてファジィ・エントロピーを最大化する選択確率p_iを推定するために，ラグランジュ乗数λ，νを用いて(23)式のように定式化する。

$$R = F - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i \cdot p_i - M\right) - \nu\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right) \rightarrow \max \tag{23}$$

ここで，(23)式をp_iで偏微分して0とおく。

$$\frac{\delta R}{\delta p_i} = -\log p_i - 1 + H_i - \lambda\mu_i - \nu = 0 \tag{24}$$

(24)式を変換すれば，

$$p_i = \exp\left[-1 + H_i - \lambda\mu_i - \nu\right] \tag{25}$$

となる。(25)式の方程式は全部でn本得られるので，これらの総和でそれぞれの式を割れば，選択確率p_iは

$$p_i = \frac{\exp\left[H_i - \lambda\mu_i\right]}{\sum_{k=1}^{n}\exp\left[H_k - \lambda\mu_k\right]} \tag{26}$$

として表され，W＝exp ［－λ］と置くと，

$$p_i = e^{H_i} \cdot W^{\mu_i} \Big/ \sum_{k=1}^{n} e^{H_k} \cdot W^{\mu_k} \tag{27}$$

となる。さらに，右辺の分母を左辺の分子に移項し，両辺にμ_iをかけてｉについてたし込むことにより，(28)式が得られる。

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot p_i \sum_{k=1}^{n} e^{H_k} \cdot W^{\mu_k} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot e^{H_i} \cdot W^{\mu_i} \tag{28}$$

左辺の$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot p_i = M$なので，(28)式は(29)式のように変換される。

$$\sum_{i=1}^{n} (\mu_i - M) \cdot e^{H_i} \cdot W^{(\mu_i - M)} = 0 \tag{29}$$

(29)式を満たすWの値を数値的に求め，その値を(27)式に代入することにより，確率変数の平均（ファジィ事象の確率）を一定の値Mに保ったもとで，ファジィ・エントロピーFを最大化する選択確率p_iを推定することができる。

(27)式を(21)式と比較すると，ファジィ・モデルから得られる選択確率は，通常のモデルの選択確率に対してeの漠然性に関するエントロピーH_i乗で重みづけしたものになっており，通常のモデルの自然な拡張形となっていることがわかる。

7．ファジィ・エントロピーを用いた一因子情報路モデル

通常の一因子情報路モデルで用いられる特性値は，価格，時間に代表される明確(クリスプ)な情報として与えられ，

エントロピーＩ／平均特性値Ｕ　(30)

を最大化する選択確率を推定するモデルであるが，6.2の場合と同様に，この特性値が「おもしろい本」のようにあいまいな情報として与えられることも多いものと思われる。この場合，偶然性のみならず漠然性に関するあいまいさを加味すれば，(30)式を(31)式に置き換えることになる。

ファジィ・エントロピーＦ／平均特性値Ｕ　(31)

本節では，まず，エントロピー最大化問題として定式化されている通常の一因子情報路モデル（以下，これを通常のモデルと呼ぶことにする）を概説し，次にファジィ・エントロピー最

大化問題に拡張したモデル[8]（以下，これをファジィ・モデルと呼ぶことにする）について述べていく。

7.1 通常の一因子情報路モデル

一因子情報路モデルに限らず，エントロピー・モデルは消費者行動の分析に主眼を置いたモデルであり，消費者の銘柄選択の際の自由勝手な選択行動に注目したモデルとして位置づけることができる。そして，一因子情報路モデルでは，「自由勝手な選択行動」と「各銘柄を特徴づける特性（例えば，価格）に関する満足感」の両面を考慮することにより，下記の2つの仮説[21]を設定している。

1) 大衆は銘柄を選択するに当たり，できるだけ自己の金銭的支出を小さくしたい
   （一般的には，ある要因に関してその特性値 x_i をなるべく小さくしたい）
2) 大衆は銘柄を選択するに当たり，何の制約もなく各自の自由意思によって，できるだけ自由勝手な選択をしたい。

この仮説にしたがって，前者の仮説を(32)式の平均特性値Lで，後者を(33)式のエントロピーIでそれぞれ捉えている。

$$L=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \tag{32}$$

$$I=-\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log p_i \tag{33}$$

ただし，i：銘柄，x：特性値，

$$p：選択確率 \quad \sum_{i=1}^{n} p_i=1$$

そして両者を考慮して，平均特性値Lを小さく，エントロピーIを大きくするために，ラグランジュ乗数を用いて，(34)式のように定式化している。

$$R=E/L-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i-1\right) \rightarrow \max \tag{34}$$

そこで，(34)式を p_i で偏微分して0とおくことにより，

$$p_i=w^{-x_i} \tag{35}$$

が得られる。さらに，選択確率の和が1であることを利用して，

$$\sum_{i=1}^{n} w^{-x_i} = 1 \tag{36}$$

を満たすwを求め，(35)式に代入することにより(34)式を満足する選択確率 p_i を求めることができる。

7.2　ファジィ・エントロピーを用いたモデル

通常の一因子情報路モデルの対象となる要因は，価格に代表される明確な特性値として与えられるものであるが，筆者は従来の研究[8]において，これを「てま」，「むずかしさ」等のあいまいな特性値に拡張している。その際，「てまがかかるものの集合」，「むずかしいものの集合」といったあいまいでその境界がぼやけている集合（ファジィ集合）に対するメンバーシップ値によって捉え，6.2と同様にファジィ・エントロピー最大化問題として，(37)式のように定式化している。

$$R = F/L - \lambda\ \left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right)\ \ \rightarrow \max \tag{37}$$

そこで，(37)式を p_i で偏微分して0とおく。

$$\frac{\delta R}{\delta p_i} = \frac{-(\log p_i + 1 - H_i)L - \mu_i \cdot F}{L^2} - \lambda = 0 \tag{38}$$

(38)式の方程式は，それぞれのiに関して合わせてn本得られる。それぞれの方程式に，p_i をかけてたし込むことにより，(39)式が得られる。

$$\frac{-\sum_{i=1}^{n} p_i(\log p_i + 1 - H_i)L - F\sum_{i=1}^{n} p_i \mu_i}{L^2} - \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i$$

$$= (F-1)/L - F/L - \lambda = -1/L - \lambda = 0 \tag{39}$$

$$\therefore\ \lambda = -1/L \tag{40}$$

さらに，このλを(26)式に代入すれば，

$$\frac{-(\log p_i + 1 - H_i)L - \mu_i \cdot F + L}{L^2} = 0 \tag{41}$$

となり，これを整理すれば，

$$\log p_i = H_i - \mu_i \cdot F/L \tag{42}$$

が得られる。したがって，選択確率 p_i は，

$$p_i = \exp\ [H_i - \mu_i \cdot F/L] \tag{43}$$

を満たす。ここで，$W = \exp\ [F/L]$ とおけば，(43)式を簡単な形に変換することができる。

$$p_i = \exp\ [H_i] \cdot W^{-\mu_i} \tag{44}$$

したがって，(45)式を満たすWを求めて，それを(44)式に代入すれば，選択確率p_iの推定値を得ることができる。

$$\sum_{i=1}^{n} exp\ [H_i]\cdot W^{-\mu_i}=1 \tag{45}$$

(44)式を(35)式と比較すると，ファジィ・モデルから得られる選択確率が，通常のモデルの選択確率に対してeの漠然性に関するエントロピーH_i乗で重みづけしたものであり，6.2の場合と同様に自然な拡張形となっていることがわかる。

8．メンバーシップ値まわりのエントロピーの平均を制約としたファジィ・エントロピー最大化モデル

8.1 通常のエントロピーを最大化するモデル

ファジィ・エントロピーを最大化するモデルについて述べる前に，6節，7節と同様に，まず通常のエントロピーを最大化する選択確率の解を導くことを考える。この場合，メンバーシップ値まわりのエントロピーの平均Hを一定の値Zに保ったもとでの通常のエントロピーの最大化問題となり，ラグランジュ乗数λ，νを用いて筆者[17]は(46)式のように定式化している。

$$R=-\sum_{i=1}^{n} p_i\, log\, p_i-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i H_i-Z\right)-\nu\left(\sum_{i=1}^{n} p_i-1\right)\rightarrow \max \tag{46}$$

そこで，(46)式をp_iで偏微分して0とおく。

$$\frac{\delta R}{\delta p_i}=-log\, p_i-1-\lambda H_i-\nu=0 \tag{47}$$

(47)式を変換すれば，

$$p_i=exp\ [-1-\lambda H_i-\nu] \tag{48}$$

となる。(48)式の方程式は全部でn本得られるので，これらの総和でそれぞれの式を割れば，選択確率p_iは

$$p_i=exp\ [-\lambda H_i]\Big/\sum_{k=1}^{n} exp\ [-\lambda H_k] \tag{49}$$

として表され，$w=exp\ [-\lambda]$と置くと，

$$p_i=w^{H_i}\Big/\sum_{k=1}^{n} w^{H_k} \tag{50}$$

となる。さらに，右辺の分母を左辺の分子に移項し，両辺にH_iをかけてiについてたし込むことにより，(51)式が得られる。

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot H_i \sum_{k=1}^{n} w^{H_k} = \sum_{i=1}^{n} H_i \cdot w^{H_i} \tag{51}$$

左辺の$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot H_i = Z$なので，(51)式は(52)式のように変換される。

$$\sum_{i=1}^{n} (H_i - Z)\ w^{H_i} = 0 \tag{52}$$

(52)式を満たすwの値を数値的に求め，その値を(50)式に代入することにより，メンバーシップ値まわりのエントロピーの平均H（サンプル全体としての漠然性に関するエントロピー）を一定の値Zに保ったもとで，通常の（確率まわりの）エントロピーEを最大化する選択確率p_iを推定することができる。

8.2 ファジィ・エントロピーを最大化するモデル

上記の通常のエントロピーの最大化モデルを基礎にして，ファジィ・エントロピーの最大化モデルを考える。この場合，メンバーシップ値まわりのエントロピーの平均Hを一定の値Zに保ったもとでのファジィ・エントロピーの最大化問題となり，ラグランジュ乗数λ，νを用いて(53)式のように定式化される。

$$\begin{aligned} R &= F - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot H_i - Z\right) - \nu \left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right) \\ &= I + H - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot H_i - Z\right) - \nu \left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right) \rightarrow \max \end{aligned} \tag{53}$$

そこで，(53)式をp_iで偏微分して0とおく。

$$\frac{\delta R}{\delta p_i} = -\mathit{log}\, p_i - 1 + H_i - \lambda \cdot H_i - \nu = 0 \tag{54}$$

(54)式を変換すれば，

$$p_i = \mathit{exp}\ [-1 - (\lambda - 1)\ H_i - \nu] \tag{55}$$

となる。(55)式の方程式は全部でn本得られるので，これらの総和でそれぞれの式を割れば，選択確率p_iは

$$p_i = \frac{\mathit{exp}\ [-(\lambda - 1)\ H_i]}{\sum_{k=1}^{n} \exp\ [-(\lambda - 1)\ H_k]} \tag{56}$$

として表され，$W = \mathit{exp}\,[-(\lambda - 1)]$と置き，式を整理すると，通常のエントロピーの最大化モデルにおける(50)式と全く同じ，

$$p_i = W^{H_i} \Big/ \sum_{k=1}^{n} W^{H_k} \tag{57}$$

となる。

これは，ファジィ・エントロピーFが通常のエントロピーIとメンバーシップ値まわりのエントロピーの平均Hに分解でき，このHを一定の値Zに固定しているため，結果としてファジィ・エントロピーの最大化は通常のエントロピーの最大化に置き換えられることを示している。これより，メンバーシップ値まわりのエントロピーの平均Hを一定の値Zに固定したもとでは，ファジィ・エントロピーの最大化問題は通常のエントロピーの最大化問題に帰着することが示された。

9．情報管理モデルにおけるファジィ・エントロピーの有効性

ここまで述べてきたように，情報管理において「情報の持つあいまいさ」に目を向けることは避けられない。それは，我々が受け取る情報のほとんどが何らかのあいまいさを有しており，5.2で定義したファジィ・メッセージとして位置づけられるためである。そして，このあいまいさには偶然性（ランダムネス）と漠然性（ファジィネス）の両面があることを認識する必要がある。

従来の情報管理モデルでは，情報の持つあいまいさを偶然性によって捉えてきた。この典型的なアプローチがシャノンの情報理論であり，さらに「最大エントロピー原理」による情報管理モデルがこれに相当する。しかし，そこには情報の持つ漠然性は反映していなかった。

これに対して，ファジィ・エントロピーは偶然性と漠然性の両面を総合的に表現した指標であり，しかも(2)式からわかるように，ファジィ事象の確率まわりのエントロピーとは異なり，偶然性と漠然性に関するあいまいさを分解して把握することができる。そして，最大エントロピー原理のエントロピーをファジィ・エントロピーに置き換えることによって，偶然性のみに注目した情報管理モデルを偶然性と漠然性の両面を考慮した情報管理モデルへと拡張することが可能となる。

この拡張モデルとして，本研究では筆者の3つのモデルを紹介したが，6節と7節のモデルでは，偶然性のみを捉えた通常のモデルの解に対して漠然性に関するエントロピー乗で重みづけした解が導かれることを確認した。したがって，ファジィ・モデルは通常のモデルの拡張形として位置づけられ，通常のモデルはファジィ・モデルの特別な場合（漠然性に関するエントロピーが0の場合）に相当する。また，8節のモデルではファジィ・エントロピーを最大化する解が通常のモデルの解に一致することを確認した。これら3つのモデルはそれぞれ，偶然性に関するあいまいさのみを取り扱った通常のモデルを包含しており，より一般的なモデルとして位置づけることができる。

このように，ファジィ・エントロピーを用いることにより，情報管理モデルにおいて偶然性

に関するあいまいさのみならず漠然性に関するあいまいさを考慮することができると同時に，最大エントロピー原理をあいまいさの二面性に関して一般化したモデルの作成が可能となる。また，筆者の従来の研究[8],[11],[13]において，これらのファジィ・モデルの実証分析を行ない，従来のモデルに比較して現実に適合した結果が得られている。

以上より，人間の情報処理過程や組織の情報管理におけるあいまいさを捉える際，またそれをモデル化する際，ファジィ・エントロピーは理論と実用の両面から有効性を発揮しうるものと考えられる。

10. おわりに

本研究では，企業環境の変化が激しさを増す今日の情報管理において重要な課題となる「情報のあいまいさ」への対応に注目し，まず，このあいまいさを特徴づけるファジィ事象の偶然性と漠然性を表現するための5つの指標の位置づけについて検討した。これにより，偶然性に注目した場合のあいまいさ，漠然性に注目した場合のあいまいさ，両者の総合的なあいまいさのそれぞれを表現するための指標を明らかにした。次に，クリスプ・メッセージと対比させながら，ファジィ事象を特徴づけるファジィ・メッセージの定義および特性の検討を行った。

その上で，通常のエントロピー最大化モデルにおいて明確（クリスプ）な情報として与えられている確率変数が，あいまい（ファジィ）な情報に置き替わった場合の3つの情報管理モデルを紹介した。これらのモデルは，あいまいな情報をファジィ集合に対するメンバーシップ値によって捉え，偶然性のみならず漠然性も加味した総合的なあいまいさ（ファジィ・エントロピー）を最大化する選択確率の推定を行なうものである。そして，導かれる解が通常のエントロピーを最大化するモデルの解を包含し，通常のモデルの拡張形として位置づけられることを示した。

以上の検討をふまえて，人間の情報処理過程や組織の情報管理におけるあいまいさを捉える際，またそれをモデル化する際，ファジィ・エントロピーは有効性を発揮しうることを示した。ファジィ・エントロピーは情報管理モデルにおける「情報のあいまいさ」へのアプローチに適した指標であるにもかかわらず，通常のエントロピーに比べてあまり研究が活発でなかったが，本研究で示したような有効性により，今後その理論的および実証的研究が進展していくことが期待される。

参考文献

[1] 山下洋史：人的資源管理の理論と実際，東京経済情報出版（1996）
[2] 西川智登，清水静江，宮本日出雄："意志決定過程における入力情報に対する判断力の構造"，日本経営システム学会誌，Vol.9，No.1，pp.35-41（1992）
[3] Klir,G.J. and Folger,T.A.,本多中二訳：ファジィ情報学，日刊工業新聞社（1993）
[4] Zimmermann,H.J. and Zysno,P.："Latent Connectives in Human-Decision Making," Fuzzy Sets and Systems，Vol.4，pp.37-51（1980）

[5] 前田博,村上周太："ファジィ結合演算による選好表現を用いた多目的問題のファジィ意志決定手法",計測自動制御学会論文集, Vol.23, pp.517-524 (1987)
[6] 山下洋史："人的情報システムにおける評定傾向分析モデルの研究", 早稲田大学博士学位論文 (1992)
[7] 松丸正延, 山下洋史, 尾関守："ファジィ条件付確率を用いた合併企業評価の分析モデル", 日本経営工学会誌, Vol.43, No.6, pp.446-451 (1993)
[8] 山下洋史, 尾関守："ファジィ・エントロピーを用いた一因子情報路モデル", 経営情報学会春季大会予稿集, pp.191-194 (1993)
[9] 山下洋史, 松丸正延："ファジィ事象の確率を用いた行動エントロピーの分析モデル", 日本経営システム学会誌, Vol.13, No.1, pp.33-38 (1996)
[10]山下洋史："偶然性と漠然性に関するあいまいさの表現方法", 山梨学院短期大学「経営研究」, No.3, pp.71-79 (1994)
[11]山下洋史："最大ファジィ・エントロピー基準による選択確率推定モデル", 日本経営工学会春季大会予稿集, pp.206-207 (1994)
[12]山下洋史："ファジィ・エントロピーを用いた多段階トランクウィリティ", 山梨学院短期大学研究紀要, Vol.15, pp.100-105 (1994)
[13]山下洋史："ファジィ事象の偶然性と漠然性", 日本経営システム学会誌, Vol.12, No.2, pp.41-46 (1995)
[14]松丸正延,山下洋史："合併企業評価モデルの比較の為のTRANQUILITY", 日本経営システム学会誌, Vol.12, No.1, pp.45-50 (1994)
[15]松丸正延, 山下洋史："偶然性と漠然性を考慮した企業評価モデルの比較", 日本経営工学会春季大会予稿集, pp.151-152 (1995)
[16]松丸正延, 山下洋史："選択確率推定モデルを用いた企業評価", 経営情報学会春季大会予稿集, pp.151-154 (1995)
[17]山下洋史："漠然性一定のもとでのエントロピー最大化モデル", 日本経営システム学会誌, Vol.13, No.2, pp.1-6 (1997)
[18]山下洋史, 尾関守, 大野高裕：" 人事考課における寛大化傾向・中央化傾向・厳格化傾向の定量的分析", 日本経営工学会誌, Vol.41, No.5, pp.336-341 (1990)
[19]山下洋史, 尾関守:："評定傾向事象の確率に関する分析モデル", 経営労働学会誌, Vol.7, pp.11-18 (1990)
[20]山下洋史："行動科学の刺激－反応モデルにおける行動エントロピー", 日本経営システム学会誌, Vol.9, No.2, pp.65-70 (1992)
[21]松丸正延編著, 山下洋史, 板倉宏明著：経営戦略と経済性のための数学・統計学, 宣協社 (1998)
[22]国沢清典：「エントロピーモデル」, 日科技連 (1975)